Teoría de Juegos

Juegos estáticos con Información incompleta

Alejandro Lugon

Departamento de Economía
PUCP

alugon@pucp.edu.pe

2023-1

Teoría de Juegos
Juegos estáticos con Información incompleta

- Juegos estáticos con Información incompleta
  - Introducción
  - Transformación de Harsanyi
  - Equilibrio Bayesiano de Nash
  - Ejemplo de información incompleta bilateral
  - Aplicaciones
    - Cournot con Inf. incompleta
    - Pelear o ceder
    - Subastas

- Consideremos los juegos:

	Cin	Fut
Cin	2,1	0,0
Fut	0,0	1,2

	Cin	Fut
Cin	2,0	0,2
Fut	0,1	1,0

⊙ El primero corresponde a la Batalla de los Sexos, el segundo corresponde a la misma historia pero ahora el jugador 2 NO quiere encontrarse con 1.

⊙ Supongamos que el jugador 1 no sabe exactamente cuál juego está jugando. El jugador 2 si lo sabe.

⊙ ¿Qué análisis debe hacer el J1? ¿Cómo debe jugar?

	Cin	Fut
Cin	2,1	0,0
Fut	0,0	1,2

	Cin	Fut
Cin	2,0	0,2
Fut	0,1	1,0

- J1 debe tener una idea, creencia, sobre que tan probable es cada juego: por ejemplo "igual de probable cada uno"

⊙ Esto es, el J1 cree que puede estar jugando cada uno de los juegos con probabilidad 1/2.

⊙ Como el J2 sabe que juego está jugando, puede tomar acciones diferentes en cada caso.

⊙ Las formas de jugar de J2 son: Cin-Cin, Cin-Fut, Fut-Cin, Fut-Fut

	Cin	Fut
Cin	2,1	0,0
Fut	0,0	1,2

	Cin	Fut
Cin	2,0	0,2
Fut	0,1	1,0

- Las formas de jugar de J2 son: Cin-Cin, Cin-Fut, Fut-Cin, Fut-Fut

⊙ Calculamos los pagos esperados de J1:

	Cin-Cin	Cin-Fut	Fut-Cin	Fut-Fut
Cin	2	1	1	0
Fut	0	1/2	1/2	1

⊙ En los tres primeros casos J1 debe jugar Cin.

- En el último debe jugar Fut.

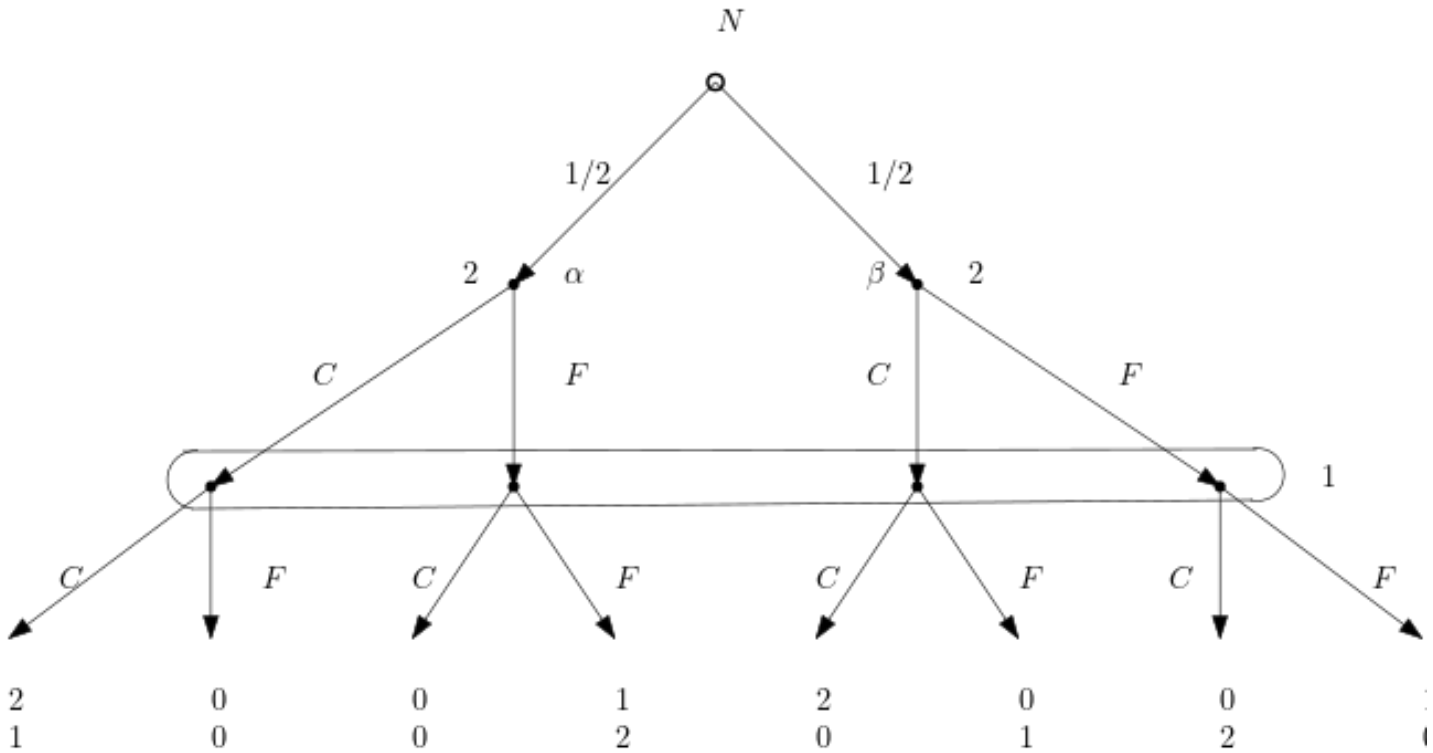
- Si J2 juega Cin-Cin, Cin-Fut o Fut-Cin, J1 debe jugar Cin
- Si J2 juega Fut-Fut, J1 debe jugar Fut

	Cin	Fut
Cin	2,1	0,0
Fut	0,0	1,2

	Cin	Fut
Cin	2,0	0,2
Fut	0,1	1,0

- Si J1 juega Cin, J2 debe jugar Cin-Fut
- Si J1 juega Fut, J2 debe jugar Fut-Cin

- La transformación de Harsanyi permite representar un juego con información incompleta como un juego con información imperfecta:
  1. Primero juega la "Naturaleza" escogiendo el estado (el juego que se va a jugar)
  2. Los jugadores reciben información, nula, parcial o total, sobre el estado.
  3. Los jugadores realizan sus acciones
  4. El estado de la naturaleza y los pagos consecuentes son revelados
- En este juego una estrategia es una regla para escoger la acción según la información recibida.

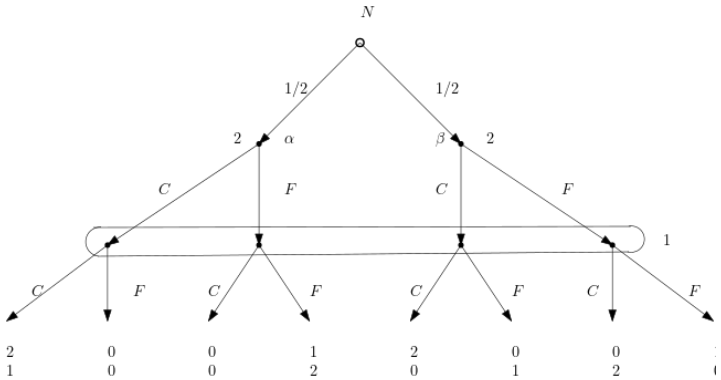


- Las estrategias del jugador 2 son CC, CF , FC y FF
- Las estrategias del jugador 1 son C y F

⊙ **El Equilibrio de Nash es (C, CF)**

⊙ En estos casos el EN de la transformación de Harsanyi recibe el nombre de Equilibrio Bayesiano de Nash para el juego original.

- Podemos pasar a la forma estratégica:



	CC	CF	FC	FF
C	$2, 0.5$	$1, 1.5$	$1, 0$	$0, 1$
F	$0, 0.5$	$0.5, 0$	$0.5, 1.5$	$1, 1$

Para encontrar los EN, pero perdemos la noción de secuencialidad, que en estos juegos puede ser crucial.

Definición (Equilibrio Bayesiano de Nash)

Un Equilibrio Bayesiano de Nash es una especificación de la estrategia de cada jugador para cada posible señal, tal que ningún jugador tenga incentivos a cambiar de estrategia para ninguna de las señales posibles.

- Consideremos los juegos:

α	Cin	Fut
Cin	2,1	0,0
Fut	0,0	1,2

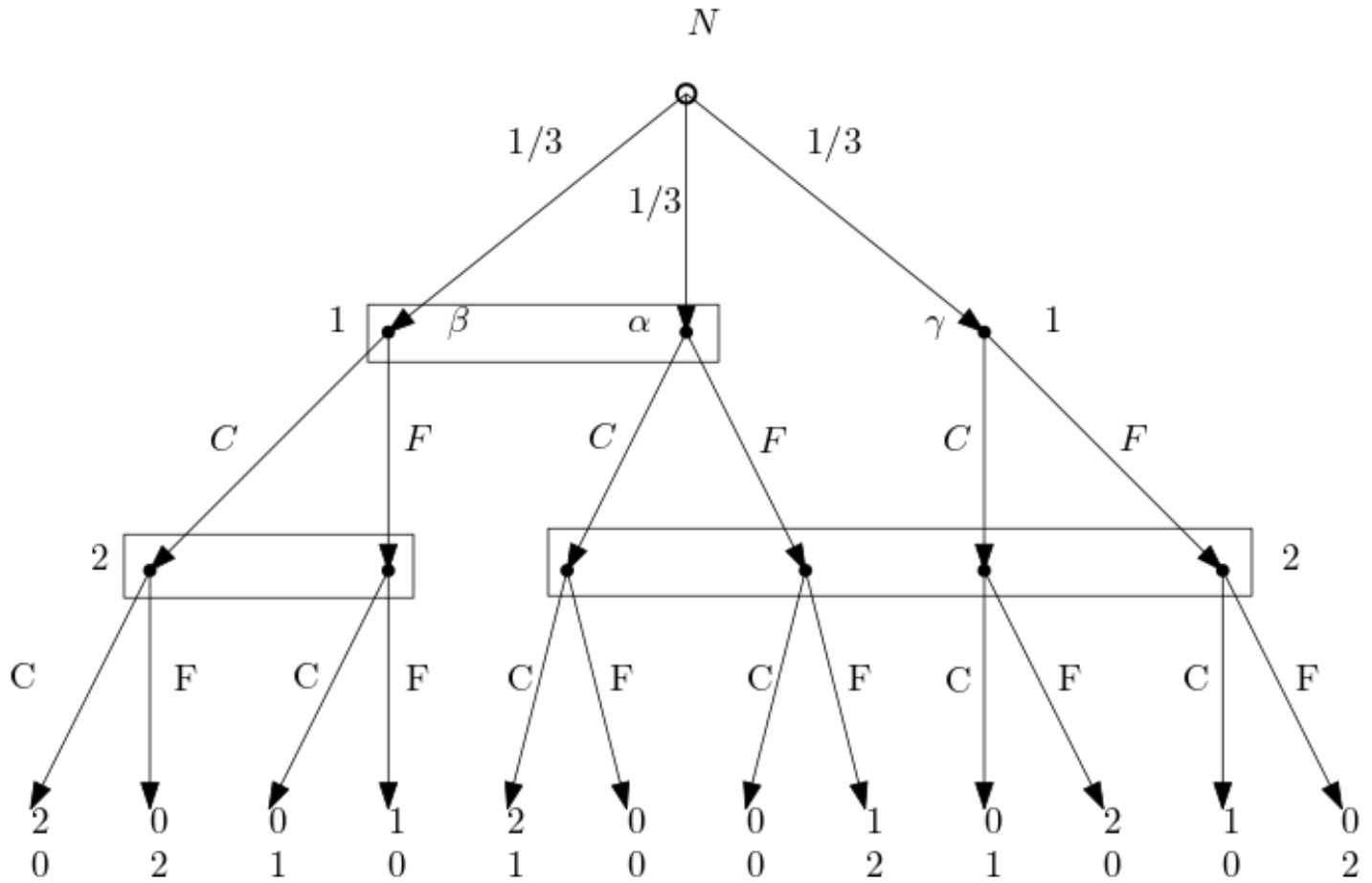
β	Cin	Fut
Cin	2,0	0,2
Fut	0,1	1,0

γ	Cin	Fut
Cin	0,1	2,0
Fut	1,0	0,2

- Consideremos que el jugador 1 sabe en cual fila está jugando y el jugador 2 sabe en cual columna está jugando.

⊙ Consideramos que las 3 situaciones son igual de probables.

- La transformación de Harsany es:



- La forma estratégica equivalente es:

	CC	CF	FC	FF
CC	$4/3, 2/3$	$4/3, 0/3$	$2/3, 4/3$	$2/3, 2/3$
CF	$5/3, 1/3$	$2/3, 2/3$	$3/3, 3/3$	$0/3, 4/3$
FC	$0/3, 2/3$	$3/3, 3/3$	$1/3, 1/3$	$4/3, 2/3$
FF	$1/3, 1/3$	$1/3, 5/3$	$2/3, 0/3$	$2/3, 4/3$

⊙ Donde observamos que no hay EN en estrategias puras,≀ debe haberlo en mixtas.

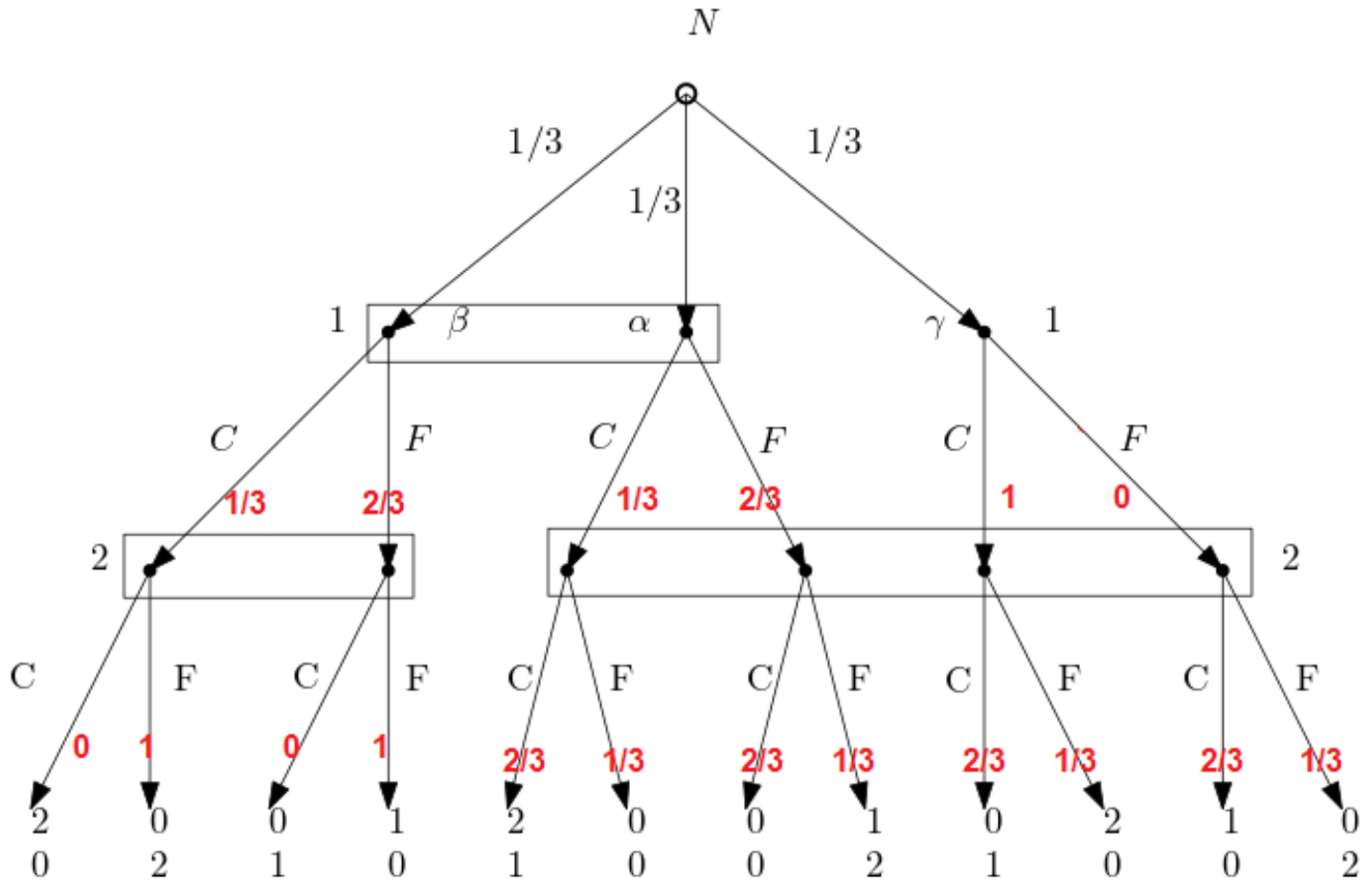
- Un EN en mixtas es:

$$((1/3, 0, 2/3, 0), (0, 0, , 2/3, 1/3))$$

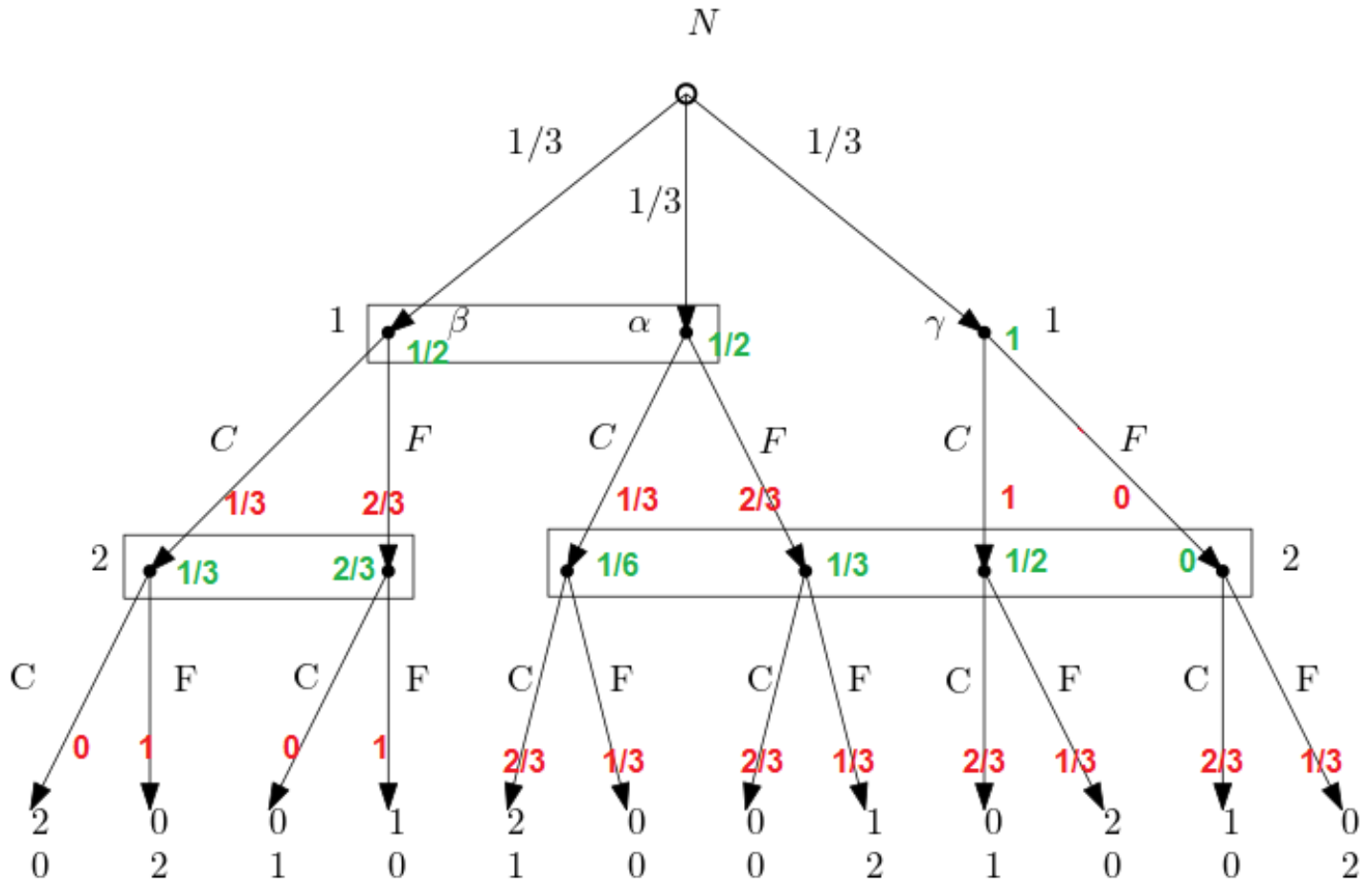
para el juego:

	CC	CF	FC	FF
CC	$4/3, 2/3$	$4/3, 0/3$	$2/3, 4/3$	$2/3, 2/3$
CF	$5/3, 1/3$	$2/3, 2/3$	$3/3, 3/3$	$0/3, 4/3$
FC	$0/3, 2/3$	$3/3, 3/3$	$1/3, 1/3$	$4/3, 2/3$
FF	$1/3, 1/3$	$1/3, 5/3$	$2/3, 0/3$	$2/3, 4/3$

- Este EN en estrategias de comportamiento es:



- Que también es ESd:



Cournot con Información incompleta

- $P(Q) = a - Q$ con $Q = q_1 + q_2$
- $C_1(q_1) = cq_1$
- $C_2(q_2) = \begin{cases} c_A q_2 & \text{con probabilidad} \quad p \\ c_B q_2 & \text{con probabilidad} \quad 1-p \end{cases}$
  - $c_A > c_B$
- La empresa 1 recibe como señal su costo.
- La empresa 2 recibe como señal el costo de la empresa 1 y su costo.

- La empresa 2 si es de tipo A tiene pago:
  - $(a - q_1 - q_{2A} - c_A)q_{2A}$
- y su mejor respuesta es:
  - $q^*_{2A}(q_1) = (a - c_A - q_1)/2$
- La empresa 2 si es de tipo B tiene pago:
  - $(a - q_1 - q_{2B} - c_B)q_{2B}$
- y su mejor respuesta es:
  - $q^*_{2B}(q_1) = (a - c_B - q_1)/2$
- La empresa 1 tiene pago esperado:
  - $p[(a - q_1 - q_{2A} - c)q_1] + (1 - p)[(a - q_1 - q_{2B} - c)q_1]$
- y su mejor respuesta es:
  - $q^*_1(q_{2A}, q_{2B}) = (a - c - pq_{2A} - (1 - p)q_{2B})/2$

- El equilibrio bayesiano de Nash será la solución al sistema:
  - $q_{2A} = (a - c_A - q_1)/2$
  - $q_{2B} = (a - c_B - q_1)/2$
  - $q_1 = (a - c - pq_{2A} - (1-p)q_{2B})/2$
- La cual es:

$$
\begin{aligned}
q_1^* &= \frac{a - 2c + (pc_A + (1-p)c_B)}{3} \\
q_{2A}^* &= \frac{a + c - 2c_A}{3} + (1-p)\frac{c_A - c_B}{6} \\
q_{2B}^* &= \frac{a + c - 2c_B}{3} + p\frac{c_B - c_A}{6}
\end{aligned}
$$

Pelear o ceder

- Dos personas están enfrentadas y pueden elegir Pelear o Ceder.
- El Señor 1 no sabe si el Señor 2 es fuerte o débil, le asigna probabilidad π a que sea fuerte. El Señor 2 sabe si es fuerte o débil.
- Si ambos ceden cada uno tiene un pago de 0
- Si uno cede y el otro pelea, el que cede tiene un pago de cero y el que pelea de 1
- Si los dos pelean, el pago es $(-1, 1)$ si el Sr. 2 es fuerte y $(1, -1)$ si es débil.

	F				D		
		P	C			P	C
π	P	-1,1	1,0	$1-\pi$	P	1,-1	1,0
	C	0,1	0,0		C	0,1	0,0

Los pagos esperados para el Sr. 1 son:

	P-P	P-C	C-P	C-C
P	$1-2\pi$	$1-2\pi$	1	1
C	0	0	0	0

- Si $\pi < 1/2$ debe pelear siempre.
- Si $\pi > 1/2$ debe ceder en los dos primeros casos y pelear en los dos últimos.

El Sr. 1:

- Si $\pi < 1/2$ debe pelear siempre.
- Si $\pi > 1/2$ debe ceder en P-P o P-C y pelear en C-P o C-C.

		F				D	
		P	C			P	C
π	P	-1,1	1,0	$1-\pi$	P	1,-1	1,0
	C	0,1	0,0		C	0,1	0,0

El Sr. 2:

- Si el Sr.1 va a pelear debe pelear si es fuerte y ceder si es débil (P-C)
- Si el Sr.1 va a ceder debe pelear siempre (P-P)

	F				D		
		P	C			P	C
π	P	-1,1	1,0	$1-\pi$	P	1,-1	1,0
	C	0,1	0,0		C	0,1	0,0

El equilibrio Bayesiano de Nash es:

- Si $\pi < 1/2$ (P,P-C) con pagos $(1-2\pi, (1,0))$
- Si $\pi > 1/2$ (C, P-P) con pagos $(0, (1,1))$

Subastas

- Dos postores participan en la subasta de un objeto.
- Cada postor conoce su valoración del objeto y que la valoración del otro postor está distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 1]$
- El pago final de cada postor será su valoración del objeto si se lo lleva o cero si no se lo lleva, menos cualquier pago que deba hacer.
- Las reglas de la subasta especifican:
  - Qué y cómo deben declarar los postores.
  - Quién se lleva el objeto
  - Cuanto paga cada postor.
- Veremos dos tipos:
  - Sobre cerrado al primer precio
  - Sobre cerrado al segundo precio (Vickrey)

Subastas

- Sobre cerrado al primer precio
  - Cada postor coloca en un sobre el precio que está dispuesto a pagar por el objeto.
  - Se lleva el objeto el que ofrezca mayor pago.
  - El que se lleva el objeto paga su oferta , el otro no paga nada.
- Sobre cerrado al segundo precio (Vickrey)
  - Cada postor coloca en un sobre el precio que está dispuesto a pagar por el objeto.
  - Se lleva el objeto el que ofrezca mayor pago.
  - El que se lleva el objeto paga la segunda oferta , el otro no paga nada.

Sobre cerrado al primer o segundo precio

- Son juegos estáticos con información incompleta
  - Dos jugadores
  - Cada jugador recibe como señal su valoración.
  - Esta señal puede o no darle cierta información sobre las valoración del otro, supondremos que no.
  - El pago de cada jugador es el esperado según la probabilidad de ganar o no la subasta de acuerdo a las posibles valoraciones del otro.
  - En el Equilibrio Bayesiano de Nash cada jugador tiene una función que le dice de acuerdo a sus posibles valoraciones cuánto ofertar en cada caso, β_i
  - Veremos EBN simétricos, los dos postores usan la misma función $\beta_1 = \beta_2$

Sobre cerrado al segundo precio (Vickrey)

$$u_1(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - b_2 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \\ (v_1 - b_2)/2 & \text{si} \quad b_1 = b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \end{cases}$$

- La estrategia $\beta(v) = v$ es débilmente dominante
- $\beta_1(v_1) = v_1$ y $\beta_2(v_2) = v_2$ forman un EBN.
- Hay otros no simétricos.

Sobre cerrado al primer precio

$$u_1(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - b_1 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \\ (v_1 - b_1)/2 & \text{si} \quad b_1 = b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \end{cases}$$

- Las estrategias $\beta_1(v_1) = v_1/2$ y $\beta_2(v_2) = v_2/2$ forman un EBN.

Sobre cerrado al primer precio

Si el postor 2 va a jugar $\beta_2(v_2) = v_2/2$:

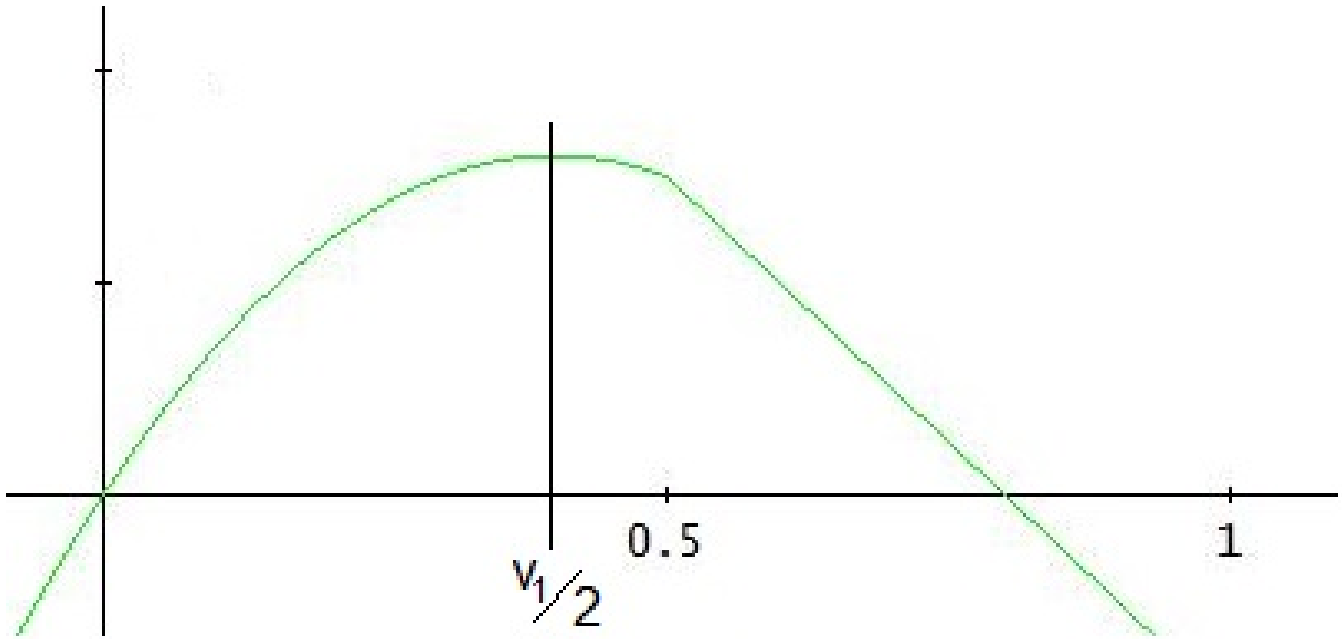
$$u_1(b_1, v_2/2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - b_1 & \text{si} \quad b_1 > v_2/2 \\ (v_1 - b_1)/2 & \text{si} \quad b_1 = v_2/2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 < v_2/2 \end{cases}$$

- v_2 está distribuido en $[0, 1]$ luego $0 \leq v_2/2 \leq 1/2$
- Si el postor 1 ofrece $b_1 > 1/2$ ganará con probabilidad 1
- Si el postor 1 ofrece $b_1 \leq 1/2$ ganará con probabilidad $Prob[b_1 > v_2/2] = Prob[v_2 < 2b_1] = 2b_1$

Sobre cerrado al primer precio

Si el postor 2 va a jugar $\beta_2(v_2) = v_2/2$ el pago esperado del postor 1 es

$$E[u_1(b_1; v_1)] = \begin{cases} v_1 - b_1 & \text{si} \quad b_1 > 1/2 \\ (v_1 - b_1)(2b_1) & \text{si} \quad b_1 \leq 1/2 \end{cases}$$



Las estrategias $\beta_1(v_1) = v_1/2$ y $\beta_2(v_2) = v_2/2$ forman un EBN.